

18. Granuláris anyagok

Koltai János és Tegzes Pál

2013. április

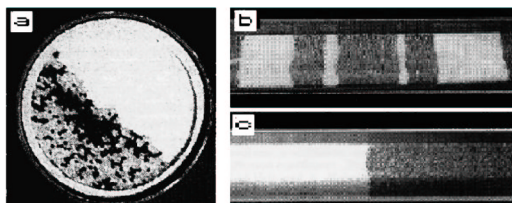
Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Nyugalmi állapot	3
3. A nyomás mélységfüggése granuláris oszlopban	5
3.1. A Janssen-modell rövid ismertetése	5
3.2. A mélységfüggés-mérés menete	6
4. Számolási feladatok	7
5. Gyakorló kérdések	7
6. Mérési feladatok	8
6.1. Praktikus tanácsok	8
7. Ajánlott irodalom	9

1. Bevezetés

Granuláris vagy más néven szemcsés anyagoknak azokat a rendszereket nevezzük, amelyek nagy számú $10^4 - 10^{15}$ makroszkopikus (jellemzően $10\mu\text{m} - 10\text{m}$ közti nagyságrendű) részecskéből állnak. Ebben a mérettartományban a legjellemzőbb hatások a részecskékre ható gravitációs erő, a két részecske összenyomódásakor fellépő taszító-erő és az érintkezési pontokban jelentkező súrlódási erő. A legegyszerűbb esetben a részecskék között vonzó kölcsönhatás nincs. A gyakorlatban ezt a viszonylag egyszerű képet számos tényező bonyolíthatja, például a részecskék közti közeg (levegő) hatása, nedvesség jelenléte esetén a felületi feszültségből vagy nagyon finom poroknál a Van der Waals kölcsönhatásból adódó vonzó kölcsönhatás, a szemcsék elektrosztatikus feltöltődéséből adódó hosszútávú hatások, stb. Ezek a járulékos hatások igen érdekes jelenségeket okoznak, azonban a szemcsés anyagok viselkedése ezek nélkül is rendkívül gazdag és összetett.

A szemcsés anyagok gyakorlati jelentősége igen nagy, szerepet játszanak a mezőgazdaság és az ipar csaknem minden területén. A gyakorlatban előforduló szemcsés anyagokat lehetetlen felsorolni: ide tartoznak a különböző építőipari alapanyagok, mint pl. a homok és a cement; az élelmiszerek, mint a cukor, a borsó, a fűszerek vagy a burgonya; a mosó- és fertőtlenítőszeres, festékanyagok, gyógyszerek, kozmetikai cikkek, növényvédő és rovarirtó szerek, robbanóanyagok és lőszeres, műanyag-ipari alapanyagok, a szén és más szilárd fűtőanyagok; de ide sorolható számos késztermék is: a műanyagárúk, a különféle elektronikai alkatrészek, a csavarárúk, stb. Ezek hatékony szállítása, tárolása, kezelése és feldolgozása kulcsfontosságú, ez magyarázza, hogy évtizedek óta folynak mérnöki kutatások a szemcsés anyagokkal kapcsolatban.



1. ábra. Szemcsés anyagokban fellépő szegregációs effektusok. a) Radiális szegregáció 2 dimenzióban. A fehér szemcsék 3 mm-es üveggolyók, a feketék 3 ilyen golyóból össze-ragasztott nagyobb szemcsék. b,c) Axiális szegregáció 3 dimenzióban. Hosszú forgó hengerekbe kétféle szemcseméretű homok keverékét helyezték, a sötét szemcsék nagyobbak, mint a világosak. b) Tranziens szegregációs mintázat. c) Kb. 10^6 fordulat után kialakuló végállapot. [1]

A fizikusok érdeklődésének középpontjába az 1990-es években kerültek a granuláris anyagok. Világossá vált, hogy fizikai leírásuk korántsem triviális. Mivel a részecskék átlagos helyzeti energiájához képest az egy szabadsági fokra jutó $k_B T$ termikus ener-

gia elhanyagolható, így elveszik a hőmérséklet átlagoló szerepe, amely a sokrészecske-rendszerek leírását megkönnyítette. Nem alakul ki termikus egyensúly, nincs ergodicitás, külső megzavarás nélkül a rendszer bármely metastabil állapota végtelen sok ideig fennmarad. Keveredés, homogén eloszlások kialakulása helyett rendeződés, szegregáció, komplex struktúrák kialakulása lép fel. Mivel hiányzik a hőmozgás által biztosított mikroszkopikus sebességskála, a granuláris anyagok folyása nem írható le a Navier-Stokes egyenletekhez hasonlóan, és a kialakuló áramlási kép is gyökeresen különbözik a viszkózus folyadékoktól: általában nem folyik az anyag egésze, hanem szétválk egy nyugvó és egy mozgó fázisra, lejtőkön lavinák, csövekben visszafelé haladó sűrűség hullámok, esetleg a folyást teljesen leállító akadályok alakulnak ki.

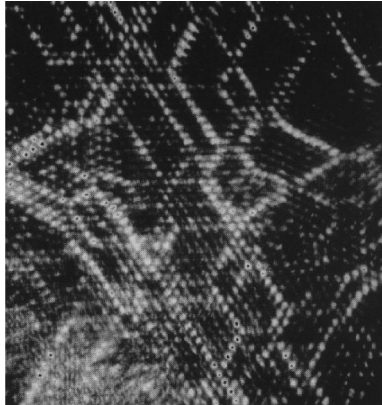
A szemcsés anyagok különleges fizikája számos meglepő jelenséghez vezet. Ezek közül a legismertebbek a különböző szegregációs effektusok (1. ábra), a rezgéses gerjesztés hatására kialakuló konvekció és halom képződés, valamint a rezgetett vékony granuláris rétegben fellépő jelenségek: a szabályos geometriai formákba rendeződő szubharmonikus állóhullámok, és a lokalizált gerjesztések, az ún. oszcillonok (2. ábra).



2. ábra. Rezgetett vékony granuláris rétegben kialakuló lokalizált állóhullám, úgynevezett oszcillon. A szemcsék 0,15 - 0,18 mm-es bronz golyók, a rétegvastagság 17 részecskényi. Az oszcillonok megjelenéséhez a kísérletet vákuumban kell végrehajtani, a rezgés amplitúdóját és frekvenciáját egy adott szűk tartományban kell beállítani. [2]

2. Nyugalmi állapot

A granuláris anyagok leírása még nyugalmi állapotban sem egyszerű. A fő nehézséget és egyben a probléma érdekességét az adja, hogy a részecskék egymással csak az érintkezési pontokban hatnak kölcsön, amelyek egy kvázi-véletlenszerű hálózatot alkotnak az



3. ábra. Polarizált fény segítségével láthatóvá tett feszültségeloszlás két dimenziós granulás anyagban. A világosabb szemcsék nagyobb feszültséget viselnek. Jól látható, hogy ezek a szemcsék láncszerű struktúrákban helyezkednek el.[3]

anyagban belül. A részecskék súlyából és az esetleges egyéb külső mechanikai hatásokból származó erők az anyagban belül csak ezen a hálózaton terjedhetnek tovább. Ezen felül az, hogy egy érintkezési pontban mekkora erő lép fel, az szintén függeni fog az adott mikroszkopikus elrendeződéstől, a részecskék pontos alakjától, felületi tulajdonságaitól; vagyis szintén véletlenszerűnek tekinthető. Mindezek következtében a mintában fellépő mechanikai feszültségek eloszlása erősen inhomogén lesz. A kísérletek tanúsága szerint a legnagyobb feszültségek láncszerű struktúrák mentén jelentkeznek, ezeket nevezzük erő-láncoknak (3. ábra).

Az erő-láncok lefutását az érintkezési pontok hálózata, s ezen keresztül az egyes szemcsék konkrét helyzete határozza meg. Ebből az következik, hogy egy nyugvó granulás rendszert nem lehet egyszerűen néhány állapot-jelzővel, mint például a rendszer geometriájával és a pakolás sűrűségével leírni. Látszólag azonos paraméterekkel rendelkező rendszereknek is lényegesen különböző lehet a viselkedése ha más módon készültek s emiatt más bennük az erő-láncok elhelyezkedése. Azt mondhatjuk, hogy a granulás rendszereknek „memóriája van” az érintkezési pontok hálózatában rejtetten tárolódik az információ a minta előéletéről.

Az erő-láncok szerepét és a memória-effektusok fontosságát egy egyszerű példával világítjuk meg. Egy vízszintes felületen hozzunk létre homok halmot olyan módon, hogy egy szűk tölcseren keresztül öntjük a homok szemeket a készülő halom tetejére. Ha ekkor megmérjük a halom alján fellépő függőleges erők eloszlását, arra a meglepő eredményre jutunk, hogy bár a halom közepe felé haladva a mért erő fokozatosan növekszik, közvetlenül a csúcs alatt nem maximum, hanem egy lokális minimum figyelhető meg. Ennek az a magyarázata, hogy a kialakuló erő-láncok rendszere a boltívekhez hasonlóan két oldalra vezeti le a közepén lévő anyag súlyát. Ha azonban más módon, egy szitán keresztül öntve

építünk fel egy geometriailag azonos homok halmot, akkor az erőeloszlás megváltozik, és a lokális minimum eltűnik.

A laborgyakorlat során az erőláncok hatását vizsgáljuk két egyszerű kísérletben. Az első kísérletben az erőláncok jelenlétének egy makroszkopikus következményét vizsgáljuk, a második kísérletben pedig mikroszkopikus szinten, az egyes szemcsékre ható erőket mérjük.

3. A nyomás mélységfüggése granuláris oszlopban

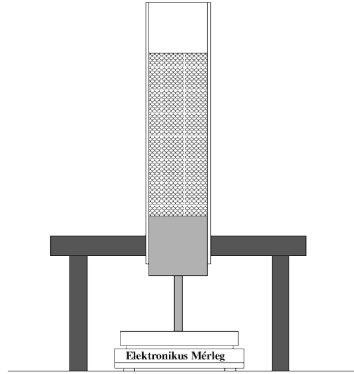
A laborgyakorlat első mérése során magas, hengeres tartóba helyezett granuláris anyag alján mérjük a függőleges irányban ható nyomóerőt. Több mint száz éve ismert tény, hogy a szemcsés anyagokban fellépő nyomás nem írható le a hidrosztatikából jól ismert $P(z) = \rho g z$ képlettel. Az oszlop magasságát növelve az oszlop alján a nyomás nem nő lineárisan a végtelenig, hanem egy adott karakterisztikus magasság fölött telítésbe megy, és végtelen magas oszlop esetén is véges nyomást mérhetünk. Ez a jelenség az anyag belsejében és a falaknál fellépő sűrűlódás és a kialakuló erőláncok rendszerének közvetlen következménye: a boltívszerűen rendeződő erőláncok az edény falának közvetítik szemcsék súlyából származó erőt, és egy idő után a hozzáadott anyag teljes súlyát a falak tartják meg.

A jelenség kvantitatív leírására Janssen 1895-ben javasolt egy egyszerű modellt, amelynek feltevései szigorúan véve ugyan nem mind megalapozottak, eredményei viszont jól egyeznek a kísérletekkel. Ennek a modellnek azóta számos finomított illetve továbbfejlesztett változata látott napvilágot, és a probléma gyakorlati jelentőségéből adódóan sokan végeztek kísérleteket is. A kísérleti eredmények alapján nem lehet azonban a különböző modellek közül egyet, mint legjobbat kiválasztani, minthogy az adatok szórása igen nagy, és még azonos minta-előkészítési eljárás használatával is gyakran ellentmondó eredmények születnek. A laborgyakorlat során mi egy igen egyszerű kísérleti elrendezést használunk, és a jelenség lényegének bemutatására szorítkozunk, így eredményeink értelmezéséhez használhatjuk Janssen gondolatmenetét.

3.1. A Janssen-modell rövid ismertetése

Tekintsünk egy R sugarú függőleges hengeres edényt megtöltve granuláris anyaggal, melynek átlagos sűrűsége ρ ! Feltesszük, hogy a függőleges nyomás nagysága csak a mélységtől függ, tehát $P(x, y, z) = P(z)$. Az anyag minden dz vastagságú, $S = R^2\pi$ felületű vízszintes szeletének egyensúlyban kell lennie. Erre a szeletre hat a saját tömegéből adódó gravitációs erő, a fölötte és alatta mérhető nyomás különbségéből származó erő és a falaknál fellépő sűrűlódási erő:

$$\rho g S dz - \frac{dP(z)}{dz} S dz - dF_{\text{frict}} = 0. \quad (1)$$



4. ábra. Mérési összeállítás a granulás anyag alján fellépő nyomás mérésére

A modell lényege, hogy feltesszük, hogy a vízszintes irányban mérhető nyomás arányos a függőleges nyomással: $P_{\text{hor}}(z) = KP(z)$, ahol K egy konstans, az ún. Janssen együttható. Ezen kívül feltesszük azt is, hogy a falaknál fellépő tapadási súrlódási erők mind felfelé mutatnak, és maximális értéküket veszik fel, így :

$$dF_{\text{frict}} = \mu KP(z) \cdot 2\pi R dz, \quad (2)$$

ahol μ a fal és az anyag közti súrlódási együttható. Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe a következő inhomogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{dP(z)}{dz} + \frac{1}{\lambda}P = \rho g, \quad (3)$$

ahol

$$\lambda = \frac{R}{2\mu K}. \quad (4)$$

A differenciálegyenlet megoldása a $P(0) = 0$ kezdőfeltétellel:

$$P(z) = \lambda \rho g [1 - e^{-z/\lambda}], \quad (5)$$

vagyis z növelésével a nyomás exponenciálisan telítésbe megy, és a telítődés karakterisztikus távolsága λ . Ez az eredmény viszonylag jó egyezést mutat a kísérletekkel.

3.2. A mélységfüggés-mérés menete

A mérési összeállítás vázlatos rajza a 4. ábrán látható. A szemcsés anyag egy függőleges üveghengerben helyezkedik el, melynek átmérője 4, 7 cm, magassága kb. 60 cm. A henger alját egy könnyen mozgó dugattyú zárja le. A dugattyúra ható erőt elektronikus mérleggel mérjük, melynek felbontása $\pm 2g$, méréshatára 5000g (kerüljük a túlterhelését!). A

mérlegről leolvashatjuk a granuláris oszlop m_l látszólagos tömegét. Az (5) egyenletből következik, hogy a látszólagos tömegnek szintén exponenciális telítődést kell mutatnia az oszlop m valódi tömegének függvényében:

$$m_l(m) = m_\infty [1 - e^{-m/m_\infty}]. \quad (6)$$

A mérés során ezt az összefüggést próbáljuk kimérni.

4. Számolási feladatok

- Igazoljuk, hogy, a (6) egyenlet valóban következik az (5) egyenletből, és adjuk meg m_∞ értékét a kísérlet paramétereivel!

5. Gyakorló kérdések

1. Mik a granuláris anyagok?
2. Milyen kölcsönhatások hatnak a részecskék között?
3. Miért nem működnek a szokásos statisztikus fizikai módszerek a granuláris anyagokra?
4. Milyen a nyomás mélységfüggése granuláris anyagoszlopban?
5. Mik a Janssen-modell legfőbb feltételezései?
6. Írjuk fel a Janssen-modell differenciálegyenletét!
7. Mit ír le a Janssen-együttható? Mekkora lenne egy hagyományos folyadékban a Janssen-együttható értéke?
8. Miért kell többször megismételni a mélységfüggés mérését?
9. Mekkora tapadási együttható egy lejtőre helyezett test esetén?
10. Miért tartozik ez a mérés a modern fizika témakörébe? Miért a XX. század utolsó évtizedében indult a terület erőteljes fejlődésnek?

6. Mérési feladatok

A nyomás mélységfüggésének mérése granuláris anyagoszlopban

1. A mérés során a hengerbe ismert tömeget kell fokozatosan adagolni. Ehhez használhatjuk a mérésnél található merőkanalat. A nagyobb pontosság (illetve egy felesleges véletlenszerű hiba kiküszöbölése érdekében a poharakba előre mérjük ki ismert, egyforma tömegeket a vizsgált anyagból. A betöltés a poharaktól folyamatos és megfelelő pontossággal megismételhető lesz. Anyagtól függően 1 – 2 merőkanálnyi anyagot töltünk a poharakba!
2. Mérjük meg üres henger esetén a dugattyú tömegét! Becsüljük meg a dugattyú súrlódásából származó hiba nagyságát. A mérleget ne tárazzuk, mert akkor hibásan fog mérni (a mérleg nullszintje elcsúszik)!
3. Mérjük ki a látszólagos tömeg függését a valódi tömegtől az egyik granuláris anyag esetén! Minden anyag esetén legalább 3 független méréssorozatot végezzünk, és adjunk becslést a mért adatok szórására! Mérjük az oszlop magasságát is, és becsüljük meg az anyag sűrűségét! (Mivel a modell a sűrűséget egyenletesnek veszi, ezért a magasságot elegendő minden feltöltés végén megmérni.) Vizsgáljunk meg két különböző töltési eljárást!
4. A mérési adatokra illesszünk a (6) egyenletnek megfelelő függvényalakot, és határozzuk meg m_∞ értékét! Elemezzük a jósolt függvényalaktól való esetleges eltéréseket! Vessük össze a mért adatok szórását a mérési pontatlanságokból és a berendezés tökéletlenségéből származó bizonytalansággal!
5. Egyszerű méréssel becsüljük meg az anyag és az üvegfal közti súrlódási együtthatót! (Például alkalmas tárgyra ragasszunk fel szemcséket és helyezük lejtőre.)
6. A mért m_∞ értékekből határozzuk meg a Janssen-együtthatót és hibáját!

6.1. Praktikus tanácsok

A mélységfüggés mérése

- Törekedjünk arra, hogy minél kevesebb véletlen eseményt, zavart vigyünk a mérésbe! Ne vározzunk véletlenszerű időtartamokat két pohár betöltése között, ne rázogassuk az anyagot, stb.
- Érdemes egy másik asztalon jegyzetelni a mérés során.
- A mérlegnek van „auto-logoff” funkciója, ami kikapcsolja a mérleget, ha túl hosszán tétlenkedünk.

- A csillapított betöltés során a pálcával ne lökjük meg a hengert, és ne tömörítsük vele a granuláris anyagot a hengerben!

Köszönetnyilvánítás

A jegyzet elkészítésében nyújtott segítségéért köszönet illeti Ábel Dánielt, a Biológiai Fizika Tanszék korábbi doktoranduszát.

7. Ajánlott irodalom

Hivatkozások

- [1] R. Chicarr, R. Peralta-Fabi, and R.M. Velasco. Segregation in dry granular systems. In Behringer and Jenkins, editors, *Powders et Grains 97*, pages 479–481. Balkema, Rotterdam, 1997.
- [2] Paul B. Umbanhowar, Francisco Melo, and Harry L. Swinney. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, 382:793–796, 1996.
- [3] G.W. Baxter. Stress-distributions in a two dimensional granular material. In Behringer and Jenkins, editors, *Powders et Grains 97*, pages 345–348. Balkema, Rotterdam, 1997.
- [4] C. h. Liu, S. R. Nagel, D. A. Schecter, S. N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan, and T. A. Witten. Force Fluctuations in Bead Packs. *Science*, 269(5223):513–515, 1995.