

# 18. Granuláris anyagok

Koltai János és Tegzes Pál

2022. szeptember

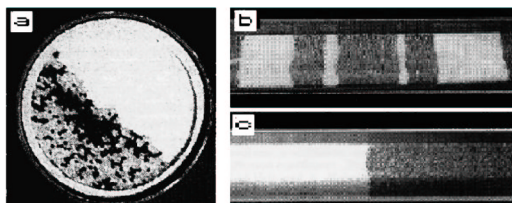
## Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>2. Nyugalmi állapot</b>	<b>3</b>
<b>3. A nyomás mélységfüggése granuláris oszlopban</b>	<b>5</b>
3.1. A Janssen-modell rövid ismertetése . . . . .	5
3.2. A mélységfüggés-mérés menete . . . . .	6
<b>4. A mikroszkopikus erőeloszlás vizsgálata</b>	<b>7</b>
4.1. A q-modell . . . . .	7
4.2. Az erőeloszlás mérés menete . . . . .	8
<b>5. Számolási feladatok</b>	<b>10</b>
<b>6. Gyakorló kérdések</b>	<b>10</b>
<b>7. Mérési feladatok</b>	<b>11</b>
7.1. Praktikus tanácsok . . . . .	12
<b>8. Ajánlott irodalom</b>	<b>14</b>

# 1. Bevezetés

Granuláris vagy más néven szemcsés anyagoknak azokat a rendszereket nevezzük, amelyek nagy számú  $10^4 - 10^{15}$  makroszkopikus (jellemzően  $10\mu\text{m} - 10\text{m}$  közti nagyságrendű) részecskéből állnak. Ebben a mérettartományban a legjellemzőbb hatások a részecskékre ható gravitációs erő, a két részecske összenyomódásakor fellépő taszító-erő és az érintkezési pontokban jelentkező sűrűlási erő. A legegyszerűbb esetben a részecskék között vonzó kölcsönhatás nincs. A gyakorlatban ezt a viszonylag egyszerű képet számos tényező bonyolíthatja, például a részecskék közti közeg (levegő) hatása, nedvesség jelenléte esetén a felületi feszültségből vagy nagyon finom poroknál a Van der Waals kölcsönhatásból adódó vonzó kölcsönhatás, a szemcsék elektrosztatikus feltöltődéséből adódó hosszútávú hatások, stb. Ezek a járulékos hatások igen érdekes jelenségeket okoznak, azonban a szemcsés anyagok viselkedése ezek nélkül is rendkívül gazdag és összetett.

A szemcsés anyagok gyakorlati jelentősége igen nagy, szerepet játszanak a mezőgazdaság és az ipar csaknem minden területén. A gyakorlatban előforduló szemcsés anyagokat lehetetlen felsorolni: ide tartoznak a különböző építőipari alapanyagok, mint pl. a homok és a cement; az élelmiszerek, mint a cukor, a borsó, a fűszerek vagy a burgonya; a mosó- és fertőtlenítőszer, festékanyagok, gyógyszerek, kozmetikai cikkek, növényvédő és rovarirtó szerek, robbanóanyagok és lőszer, műanyag-ipari alapanyagok, a szén és más szilárd fűtőanyagok; de ide sorolható számos késztermék is: a műanyagárak, a különféle elektronikai alkatrészek, a csavarárak, stb. Ezek hatékony szállítása, tárolása, kezelése és feldolgozása kulcsfontosságú, ez magyarázza, hogy évtizedek óta folynak mérnöki kutatások a szemcsés anyagokkal kapcsolatban.



1. ábra. Szemcsés anyagokban fellépő szegregációs effektusok. a) Radiális szegregáció 2 dimenzióban. A fehér szemcsék 3 mm-es üveggolyók, a feketék 3 ilyen golyóból össze- ragasztott nagyobb szemcsék. b,c) Axiális szegregáció 3 dimenzióban. Hosszú forgó hengerekbe kétféle szemcseméretű homok keverékét helyezték, a sötét szemcsék nagyobbak, mint a világosak. b) Tranziens szegregációs mintázat. c) Kb.  $10^6$  fordulat után kialakuló végállapot. [1]

A fizikusok érdeklődésének középpontjába az 1990-es években kerültek a granuláris anyagok. Világossá vált, hogy fizikai leírásuk korántsem triviális. Mivel a részecskék átlagos helyzeti energiájához képest az egy szabadsági fokra jutó  $k_B T$  termikus ener-

gia elhanyagolható, így elveszik a hőmérséklet átlagoló szerepe, amely a sokrészecske-rendszerek leírását megkönnyítette. Nem alakul ki termikus egyensúly, nincs ergodicitás, külső megzavarás nélkül a rendszer bármely metastabil állapota végtelen sok ideig fennmarad. Keveredés, homogén eloszlások kialakulása helyett rendeződés, szegregáció, komplex struktúrák kialakulása lép fel. Mivel hiányzik a hőmozgás által biztosított mikroszkopikus sebességskála, a granuláris anyagok folyása nem írható

le a Navier-Stokes egyenletekhez hasonlóan, és a kialakuló áramlási kép is gyökeresen különbözik a viszkózus folyadékoktól: általában nem folyik az anyag egésze, hanem szétválk egy nyugvó és egy mozgó fázisra, lejtőkön lavinák, csövekben visszafelé haladó sűrűség hullámok, esetleg a folyást teljesen leállító akadályok alakulnak ki.

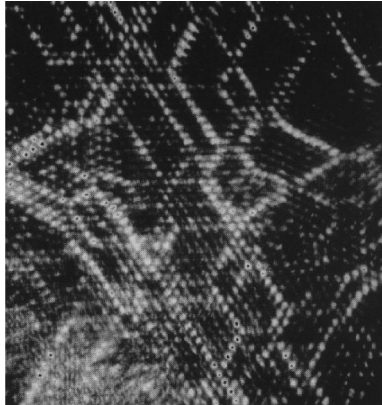
A szemcsés anyagok különleges fizikája számos meglepő jelenséghez vezet. Ezek közül a legismertebbek a különböző szegregációs effektusok (1. ábra), a rezgéses gerjesztés hatására kialakuló konvekció és halom képződés, valamint a rezgetett vékony granuláris rétegben fellépő jelenségek: a szabályos geometriai formákba rendeződő szubharmonikus állóhullámok, és a lokalizált gerjesztések, az ún. oszcillonok (2. ábra).



2. ábra. Rezgetett vékony granuláris rétegben kialakuló lokalizált állóhullám, úgynevezett oszcillon. A szemcsék 0,15 - 0,18 mm-es bronz golyók, a rétegvastagság 17 részecskényi. Az oszcillonok megjelenéséhez a kísérletet vákuumban kell végrehajtani, a rezgés amplitúdóját és frekvenciáját egy adott szűk tartományban kell beállítani. [2]

## 2. Nyugalmi állapot

A granuláris anyagok leírása még nyugalmi állapotban sem egyszerű. A fő nehézséget és egyben a probléma érdekességét az adja, hogy a részecskék egymással csak az érintkezési pontokban hatnak kölcsön, amelyek egy kvázi-véletlenszerű hálózatot alkotnak az



3. ábra. Polarizált fény segítségével láthatóvá tett feszültségeloszlás két dimenziós granulás anyagban. A világosabb szemcsék nagyobb feszültséget viselnek. Jól látható, hogy ezek a szemcsék láncszerű struktúrákban helyezkednek el.[3]

anyagban belül. A részecskék súlyából és az esetleges egyéb külső mechanikai hatásokból származó erők az anyagban belül csak ezen a hálózaton terjedhetnek tovább. Ezen felül az, hogy egy érintkezési pontban mekkora erő lép fel, az szintén függeni fog az adott mikroszkopikus elrendeződéstől, a részecskék pontos alakjától, felületi tulajdonságaitól; vagyis szintén véletlenszerűnek tekinthető. Mindezek következtében a mintában fellépő mechanikai feszültségek eloszlása erősen inhomogén lesz. A kísérletek tanúsága szerint a legnagyobb feszültségek láncszerű struktúrák mentén jelentkeznek, ezeket nevezzük erő-láncoknak (3. ábra).

Az erő-láncok lefutását az érintkezési pontok hálózata, s ezen keresztül az egyes szemcsék konkrét helyzete határozza meg. Ebből az következik, hogy egy nyugvó granulás rendszert nem lehet egyszerűen néhány állapot-jelzővel, mint például a rendszer geometriájával és a pakolás sűrűségével leírni. Látszólag azonos paraméterekkel rendelkező rendszereknek is lényegesen különböző lehet a viselkedése ha más módon készültek s emiatt más bennük az erő-láncok elhelyezkedése. Azt mondhatjuk, hogy a granulás rendszereknek „memóriája van” az érintkezési pontok hálózatában rejtetten tárolódik az információ a minta előéletéről.

Az erő-láncok szerepét és a memória-effektusok fontosságát egy egyszerű példával világítjuk meg. Egy vízszintes felületen hozzunk létre homok halmot olyan módon, hogy egy szűk tölcseren keresztül öntjük a homok szemeket a készülő halom tetejére. Ha ekkor megmérjük a halom alján fellépő függőleges erők eloszlását, arra a meglepő eredményre jutunk, hogy bár a halom közepe felé haladva a mért erő fokozatosan növekszik, közvetlenül a csúcs alatt nem maximum, hanem egy lokális minimum figyelhető meg. Ennek az a magyarázata, hogy a kialakuló erő-láncok rendszere a boltívekhez hasonlóan két oldalra vezeti le a közepén lévő anyag súlyát. Ha azonban más módon, egy szitán keresztül öntve

építünk fel egy geometriailag azonos homok halmot, akkor az erőeloszlás megváltozik, és a lokális minimum eltűnik.

A laborgyakorlat során az erőláncok hatását vizsgáljuk két egyszerű kísérletben. Az első kísérletben az erőláncok jelenlétének egy makroszkopikus következményét vizsgáljuk, a második kísérletben pedig mikroszkopikus szinten, az egyes szemcsékre ható erőket mérjük.

### 3. A nyomás mélységfüggése granuláris oszlopban

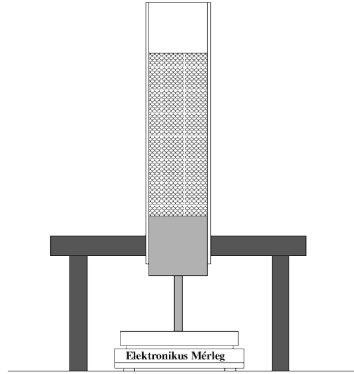
A laborgyakorlat első mérése során magas, hengeres tartóba helyezett granuláris anyag alján mérjük a függőleges irányban ható nyomóerőt. Több mint száz éve ismert tény, hogy a szemcsés anyagokban fellépő nyomás nem írható le a hidrosztatikából jól ismert  $P(z) = \rho gz$  képlettel. Az oszlop magasságát növelve az oszlop alján a nyomás nem nő lineárisan a végtelenig, hanem egy adott karakterisztikus magasság fölött telítésbe megy, és végtelen magas oszlop esetén is véges nyomást mérhetünk. Ez a jelenség az anyag belsejében és a falaknál fellépő sűrűlódás és a kialakuló erőláncok rendszerének közvetlen következménye: a boltívszerűen rendeződő erőláncok az edény falának közvetítik szemcsék súlyából származó erőt, és egy idő után a hozzáadott anyag teljes súlyát a falak tartják meg.

A jelenség kvantitatív leírására Janssen 1895-ben javasolt egy egyszerű modellt, amelynek feltevései szigorúan véve ugyan nem mind megalapozottak, eredményei viszont jól egyeznek a kísérletekkel. Ennek a modellnek azóta számos finomított illetve továbbfejlesztett változata látott napvilágot, és a probléma gyakorlati jelentőségéből adódóan sokan végeztek kísérleteket is. A kísérleti eredmények alapján nem lehet azonban a különböző modellek közül egyet, mint legjobbat kiválasztani, minthogy az adatok szórása igen nagy, és még azonos minta-előkészítési eljárás használatával is gyakran ellentmondó eredmények születnek. A laborgyakorlat során mi egy igen egyszerű kísérleti elrendezést használunk, és a jelenség lényegének bemutatására szorítkozunk, így eredményeink értelmezéséhez használhatjuk Janssen gondolatmenetét.

#### 3.1. A Janssen-modell rövid ismertetése

Tekintsünk egy  $R$  sugarú függőleges hengeres edényt megtöltve granuláris anyaggal, melynek átlagos sűrűsége  $\rho$ ! Feltesszük, hogy a függőleges nyomás nagysága csak a mélységtől függ, tehát  $P(x, y, z) = P(z)$ . Az anyag minden  $dz$  vastagságú,  $S = R^2\pi$  felületű vízszintes szeletének egyensúlyban kell lennie. Erre a szeletre hat a saját tömegéből adódó gravitációs erő, a fölötte és alatta mérhető nyomás különbségéből származó erő és a falaknál fellépő sűrűlódási erő:

$$\rho g S dz - \frac{dP(z)}{dz} S dz - dF_{\text{frict}} = 0. \quad (1)$$



4. ábra. Mérési összeállítás a granulás anyag alján fellépő nyomás mérésére

A modell lényege, hogy feltesszük, hogy a vízszintes irányban mérhető nyomás arányos a függőleges nyomással:  $P_{\text{hor}}(z) = KP(z)$ , ahol  $K$  egy konstans, az ún. Janssen együttható. Ezen kívül feltesszük azt is, hogy a falaknál fellépő tapadási súrlódási erők mind felfelé mutatnak, és maximális értéküket veszik fel, így :

$$dF_{\text{frict}} = \mu KP(z) \cdot 2\pi R dz, \quad (2)$$

ahol  $\mu$  a fal és az anyag közti súrlódási együttható. Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe a következő inhomogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{dP(z)}{dz} + \frac{1}{\lambda}P = \rho g, \quad (3)$$

ahol

$$\lambda = \frac{R}{2\mu K}. \quad (4)$$

A differenciálegyenlet megoldása a  $P(0) = 0$  kezdőfeltétellel:

$$P(z) = \lambda \rho g [1 - e^{-z/\lambda}], \quad (5)$$

vagyis  $z$  növelésével a nyomás exponenciálisan telítésbe megy, és a telítődés karakterisztikus távolsága  $\lambda$ . Ez az eredmény viszonylag jó egyezést mutat a kísérletekkel.

### 3.2. A mélységfüggés-mérés menete

A mérési összeállítás vázlatos rajza a 4. ábrán látható. A szemcsés anyag egy függőleges üveghengerben helyezkedik el, melynek átmérője 4, 7 cm, magassága kb. 60 cm. A henger alját egy könnyen mozgó dugattyú zárja le. A dugattyúra ható erőt elektronikus mérleggel mérjük, melynek felbontása  $\pm 2g$ , méréshatára 5000g (kerüljük a túlterhelését!). A

mérlegről leolvashatjuk a granuláris oszlop  $m_l$  látszólagos tömegét. Az (5) egyenletből következik, hogy a látszólagos tömegnek szintén exponenciális telítődést kell mutatnia az oszlop  $m$  valódi tömegének függvényében:

$$m_l(m) = m_\infty [1 - e^{-m/m_\infty}]. \quad (6)$$

A mérés során ezt az összefüggést próbáljuk kimérni.

## 4. A mikroszkopikus erőeloszlás vizsgálata

### 4.1. A q-modell

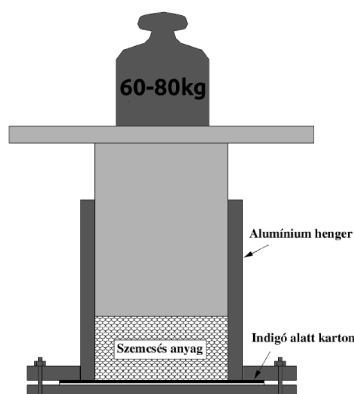
Mint korábban említettük az erőláncok lefutását az érintkezési pontok kvázi-véletlenszerű hálózata szabja meg, így azt pontosan nem tudjuk megjósolni. Megkísérrelhetjük viszont ennek a véletlenszerű hálózatnak a statisztikus leírását, s ebből értékes információt nyerhetünk a kialakuló erőkre vonatkozóan is. C.-h. Liu és társai 1995-ben javasoltak egy egyszerű elméleti modellt, ami jóslatot ad az egyes szemcsékre ható erők eloszlására [4].

A modell feltevése szerint az erőláncok kialakításában domináns szerepet játszik az, hogy a szemcsék elhelyezkedésében mutatkozó szabálytalanságok miatt egy kiszemelt szemcsére felülről ható erők nem egyenletesen oszlanak meg az őt tartó szemcsék között. Tekintsünk egy szabályos rácsot, melynek minden rácsponthoz egy egységnyi tömegű részecske található. Minden részecske az alatta lévő rétegben lévő  $N$  másik részecskén nyugszik. Egy adott szemcsére ható összes súlyerő ennek az  $N$  részecskének továbbítottik véletlenszerű megoszlásban: az  $i$ -ik részecske által a  $j$ -ik részecskének továbbított erő jelölje a  $q_{ij}$  véletlen változó. (Az egyszerűség kedvéért a modellben eltekintünk az  $N$  koordinációs szám változásaitól és nem foglalkozunk az erők vízszintes komponensével.) Hasonlóképpen egy adott részecskére ható súlyerő a felette lévő rétegben vele kapcsolatban lévő  $N$  darab szemcsé járulékaiból adódik össze, ehhez adódik a saját súlya (= 1). Eszerint az  $M$  mélységben lévő  $i$ -ik részecske által megtartott súly,  $w(M, i)$ , a következő sztochasztikus egyenletet kell, hogy kielégítse:

$$w(M, i) = 1 + \sum_{j=1}^N q_{ji}(M-1)w(M-1, j). \quad (7)$$

A valóságban a  $q_{ij}$  változók térben korreláltak: ha egy ponton az erők adott módon oszlanak meg, akkor annak kihatása van a pont környezetére is. A modell keretein belül figyelmen kívül hagyjuk ezeket a térbeli korrelációkat, és feltesszük, hogy a  $q_{ij}$  változók mindenütt azonos eloszlást követnek. Ez a feltevés lényegében az átlagtér-közelítésnek felel meg. A  $q_{ij}$  változók eloszlására sokféle feltevést tehetünk, az egyetlen megkötés, hogy eleget kell tennie a

$$\sum_{j=1}^N q_{ij} = 1 \quad (8)$$



5. ábra. Mérési összeállítás a szemcsés anyagban az egyes szemcsékre ható erők eloszlásának vizsgálatára

kényszerfeltételnek, ami az egyes szemcsék egyensúlyát biztosítja. A legegyszerűbb választás az, amikor a kényszerfeltételnek eleget tevő minden  $q_{ij}$  készlet valószínűsége azonos. Belátható, hogy ekkor az egy szemcsé által megtartott redukált súly,  $v = w/M$  eloszlásfüggvénye  $M \rightarrow \infty$  határesetben egy adott eloszláshoz tart:

$$P_{\text{egyenletes}}(v) = \frac{N^N}{(N-1)!} v^{(N-1)} e^{-Nv}. \quad (9)$$

Megmutatható, hogy ha a  $q_{ij}$ -k eloszlására más feltevést teszünk, átlagtér-közelítésben akkor is hasonló eredményre jutunk, nagy  $v$ -k esetén:

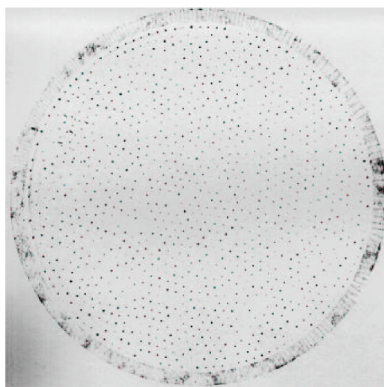
$$P(v) \propto v^{N-1} e^{-av}, \quad (10)$$

ahol  $a$  konstans. Arra jutottunk, tehát, hogy a szemcséken mérhető erők eloszlása exponenciálisan cseng le. Ez jóval lassabb lecsengés, mint a Gauss-eloszlásban szereplő  $e^{-x^2}$ , vagyis arra utal, hogy az átlagos erőnél lényegesen nagyobb erők súlya meglepően nagy. Ezt az eredményt fogjuk a gyakorlat során kísérletileg ellenőrizni.

## 4.2. Az erőeloszlás mérés menete

A mérést az 5. ábrán látható elrendezésben végezzük. Egy henger alakú tartó aljára kartonlapra helyezett indigót erősítünk. A tartóba szabályos üveggolyókból álló szemcsés anyagot töltünk, amelyre egy dugattyú segítségével kb. 600 – 800 N nagyságú erővel hatunk. Az erő a szemcsés anyagban az erőláncokon keresztül továbbítódik a falaknak és az edény aljának. Az edény alján lévő szemcsék nekinyomódnak az indigónak, és a rájuk ható erővel arányos nagyságú nyomot hagynak a kartonpapíron. Így a kartonlapon lévő foltok méreteloszlásából következtethetünk az erőeloszlásra.





6. ábra. Az indigóra nyomódó részecskék által hagyott tipikus mintázat az erőeloszlás mérésénél

A kísérlet egyszerű, de odafigyelést igényel, hajtsuk végre gondosan! A kartonlapot és az indigót vágjuk méretre, és a csavarokkal erősítsük a tartó aljára. Ügyeljünk, hogy közben az indigó ne fesse meg a lapot, mert az megnehezíti az eredmény kiértékelését! Töltsünk szemcsés anyagot a tartóba! Igen fontos, hogy a töltéskor a szemcsék ne ütközzenek nagy sebességgel a tartó aljának, mert az ettől származó nyomok teljesen elmoshatják a végeredményt. Az óvatos töltésben segíthet egy, az edénybe helyezett lap, mely lefékezi a golyókat. Itt jegyezzük meg, hogy a kísérlethez használt anyag nem olcsó, és csak külföldről szerezhető be, vigyázzunk rá, hogy ne szóródjon ki! A szemcsés anyag felszínét óvatos, vízszintes irányú rázással hozzuk vízszintesbe, ekkor ráhelyezhetjük a dugattyút! A dugattyúra ráállva a testsúlynak megfelelő, kb. 60 – 80 kg-mal terheljük meg felülről a szemcséket! Igyekezünk a dugattyúra egyenletes erővel hatni, tehát nem ugrálni rajta, de arra is figyeljünk, hogy ne essünk le róla!

Néhány másodperc múlva le lehet lépni a dugattyúról.

A dugattyút óvatosan távolítsuk el: mivel nagyon pontosan illeszkedik a hengerbe, ezért a levegő nehezen tud a helyére bejutni, ennek ellenére szép lassan azért kiemelhető. A dugattyú aljára gyakran rátapad egy-két szemcse, figyeljünk rá, hogy ezek ne guruljanak el. A szemcsés anyag kiöntése és a tartó szétcsavarozása után megtekinthetjük a kapott mintázatot, ami a 6. ábrához lesz hasonló. Ezt egy scanner segítségével számítógépbe visszük, majd a 7.1. szakaszban leírt módon meghatározzuk a foltok méreteloszlását. A statisztikai hibák csökkentése érdekében hajtsunk végre több független mérés, és ezek együtteséből határozzuk meg az eloszlást.

Ahhoz, hogy a méreteloszlást erőeloszlássá transzformáljuk, meg kellene becsülnünk, hogy egy adott foltméret mekkora erőnek felel meg. Ez azonban viszonylag nehézkes, és feltehetjük, hogy a foltméret – meglehetősen nagy szórással – arányos a ható erővel. Mivel úgyszólván az eloszlásfüggvény alakjára vagyunk kíváncsiak, ezért mindegy, hogy nyomóerőt ( $N$ -t) vagy foltméretet (pixelszámot) használunk. A lineáris közelítés miatt az egyikről

a másakra való áttérés nem változtatná meg az eloszlásfüggvény alakját.

## 5. Számolási feladatok

- Igazoljuk, hogy, a (6) egyenlet valóban következik az (5) egyenletből, és adjuk meg  $m_\infty$  értékét a kísérlet paramétereivel!

## 6. Gyakorló kérdések

1. Mik a granuláris anyagok?
2. Milyen kölcsönhatások hatnak a részecskék között?
3. Miért nem működnek a szokásos statisztikus fizikai módszerek a granuláris anyagokra?
4. Milyen a nyomás mélységfüggése granuláris anyagoszlopban?
5. Mik a Janssen-modell legfőbb feltételezései?
6. Írjuk fel a Janssen-modell differenciálegyenletét!
7. Mit ír le a Janssen-együttható? Mekkora lenne egy hagyományos folyadékban a Janssen-együttható értéke?
8. Miért kell többször megismételni a mélységfüggés mérését?
9. Mekkora tapadási együttható egy lejtőre helyezett test esetén?
10. Mit ír le a q-modell?
11. Milyen a granuláris anyaggal töltött edény alján mérhető redukált súly eloszlásfüggvénye?
12. Miért érdemes többször megismételni az erőeloszlás mérést?
13. Milyen szemcsékkel kell az erőeloszlás mérést elvégezni? Miért?
14. Miért tartozik ez a mérés a modern fizika témakörébe? Miért a XX. század utolsó évtizedében indult a terület erőteljes fejlődésnek?

## 7. Mérési feladatok

### A nyomás mélységfüggésének mérése granuláris anyagoszlopban

1. A mérés során a hengerbe ismert tömeget kell fokozatosan adagolni. Ehhez használhatjuk a mérésnél található merőkanalat. A nagyobb pontosság (illetve egy felesleges véletlenszerű hiba kiküszöbölése érdekében a poharakba előre mérjük ki ismert, egyforma tömegeket a vizsgált anyagból. A betöltés a poharaktól folyamatos és megfelelő pontossággal megismételhető lesz. Anyagtól függően 1 – 2 merőkanálnyi anyagot töltünk a poharakba!
2. Mérjük meg üres henger esetén a dugattyú tömegét! Becsüljük meg a dugattyú súrlódásából származó hiba nagyságát. A mérleget ne tárazzuk, mert akkor hibásan fog mérni (a mérleg nullszintje elcsúszik)!
3. Mérjük ki a látszólagos tömeg függését a valódi tömegtől az egyik granuláris anyag esetén! Minden anyag esetén legalább 3 független méréssorozatot végezzünk, és adjunk becslést a mért adatok szórására! Mérjük az oszlop magasságát is, és becsüljük meg az anyag sűrűségét! (Mivel a modell a sűrűséget egyenletesnek veszi, ezért a magasságot elegendő minden feltöltés végén megmérni.) Vizsgáljunk meg két különböző töltési eljárást!
4. A mérési adatokra illesszünk a (6) egyenletnek megfelelő függvényalakot, és határozzuk meg  $m_\infty$  értékét! Elemezzük a jóslott függvényalaktól való esetleges eltéréseket! Vessük össze a mért adatok szórását a mérési pontatlanságokból és a berendezés tökéletlenségéből származó bizonytalansággal!
5. Egyszerű méréssel becsüljük meg az anyag és az üvegfal közti súrlódási együtthatót! (Például alkalmas tárgyra ragasszunk fel szemcséket és helyezük lejtőre.)
6. A mért  $m_\infty$  értékekből határozzuk meg a Janssen-együtthatót és hibáját!

### Az erőeloszlás mérése granuláris anyaggal töltött edény alján

1. Készítsünk legalább 5 darab lenyomatot a korábban részletezett módon! A lenyomatok elkészítése során törekedjünk arra, hogy azok azonos körülmények között készüljenek el!
2. A fent ismertetett módon határozzuk meg az egyes szemcséken mérhető erők eloszlását! A kapott görbét ábrázoljuk szemilogaritmikus ábrában, ahol az exponenciális lecsengés egy egyenesként jelenik meg! Illesszünk a (10) egyenletnek megfelelő függvényalakot, illetve a folyadékoknál várható Gauss-görbés  $e^{-x^2}$  lecsengést! Hasonlítsuk össze ezen két elméleti görbe illeszkedését! Minden mért adatunkra becsüljük meg a mérés hibáját is!

3. Vizsgáljuk meg az eloszlásfüggvény homogenitását is! A lenyomaton egyenlő területű részeket kijelölve, az egyes részeken mérhető eloszlásfüggvények eltérése utalhat inhomogenitásra. Ezen vizsgálat elvégzésére vágjuk fel két egyenlő területű darabra a kör alakú lenyomatot, készítsünk mindkettőből egy-egy hisztogramot, majd hasonlítsuk össze őket!

Kétféle felosztási módot is próbáljunk ki: az első esetben egy átmérővel bontsuk jobb ill. baloldali részekre, a második esetben egy koncentrikus körrel egy belső körlapra és egy külső körgyűrűre.

## 7.1. Praktikus tanácsok

### A mélységfüggés mérése

- Törekedjünk arra, hogy minél kevesebb véletlen eseményt, zavart vigyünk a mérésbe! Ne várokozzunk véletlenszerű időtartamokat két pohár betöltése között, ne rázogassuk az anyagot, stb.
- Érdemes egy másik asztalon jegyzetelni a mérés során.
- A mérlegnek van „auto-logoff” funkciója, ami kikapcsolja a mérleget, ha túl hosszan tétlenkedünk.
- A csillapított betöltés során a pálcával ne lökjük meg a hengert, és ne tömörítsük vele a granuláris anyagot a hengerben!

### Az erőeloszlás mérése

A mérés során ügyeljünk az alábbi követelmények betartására:

1. A pontosabb eredmények elérése érdekében több lenyomaton mérhető eloszlást kell együtt kiértékelni. Az egyes eloszlások összeadása csak akkor jogos, ha azok azonos módon készültek. Azaz ugyanakkora terheléssel, ugyanolyan módon szkennelve, ugyanolyan küszöbszintet használva, stb.
2. A mérés során digitális képeket kell elemezni. Fontos, hogy a feldolgozás során tilos veszteséges kép-formátumot (pl. jpeg) használni, mert a veszteséges tömörítés okozta információvesztés illetve az általa okozott zaj megzavarhatja a mérést. A képek bmp formátumban készülnek, legegyszerűbb a feldolgozás során végig ilyen formátumot használni.

A kiértékelés folyamata:

1. Az elkészült lenyomatok beszkennelése.

A lenyomatokat legalább 600 dpi felbontásban, 8bpp szürkeárnyaltos fájlba. A laborban található gépen ezt a lépést el lehet végezni. A tálcán rögzített windows fax- és szkener alkalmazást indítsuk el! A villámnézet segítségével kiválaszthatjuk a mintánknak megfelelő tartományt! A kavardások elkerülése érdekében érdemes a lap megmaradt sarkára felírni a lenyomat sorszámát.

*Megjegyzés:* kerülendő a veszteséges tömörítést alkalmazó jpeg képformátum használata!

2. Képfeldolgozó program letöltése.

*Megjegyzés:* ez a kilépés kihagyható azok számára, akik az opencv2 csomagban meg tudják oldani a megfelelő alakzatok kivágását a képből.

Ajánlott ingyenes képfeldolgozó program a **gimp**, amelyet **WINDOWS**-hoz a <http://www.gimp.org> oldalon találtok. **LINUX** alatt általában a disztribúcióban benne van vagy feltehető, de ha nincs, akkor a <http://www.gimp.org> oldalról beszerezhető.

3. A kiválasztott kép feldolgozó program segítségével ki kell vágni a képekből a kiértékelendő kör (félkör vagy gyűrű) alakú tartományokat!
4. A labor honlapján illetve a méréshez tartozó számítógépen megtalálható az a jupyter notebook ([granu\\_segedlet.ipynb](#)), amiben a kiértékelés következő lépése le van írva, azaz a foltok méretének lemérése. A küszöbérték megállapítása automatikusan történik az opencv2 csomagban implementált Otsu-algoritmussal. Ezután pedig az összefüggő tartományokat keressük meg a `connectedComponentsWithStats()` függvénnyel.
5. A hisztogramok elkészítése után, a kapott eloszlásfüggvényre Gauss- illetve exponenciális függvényt is kell illeszteni. Az illesztés hibáját figyelembe véve el kell dönteni, hogy melyik illeszkedik jobban. Az eredményeket szemilogaritmusan (az  $y$  tengely legyen logaritmikus) is rajzoljátok fel!

## Köszönetnyilvánítás

A jegyzet elkészítésében nyújtott segítségéért köszönet illeti Ábel Dánielt, a Biológiai Fizika Tanszék korábbi doktoranduszát.

## 8. Ajánlott irodalom

### Hivatkozások

- [1] R. Chicarr, R. Peralta-Fabi, and R.M. Velasco. Segregation in dry granular systems. In Behringer and Jenkins, editors, *Powders et Grains 97*, pages 479–481. Balkema, Rotterdam, 1997.
- [2] Paul B. Umbanhowar, Francisco Melo, and Harry L. Swinney. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, 382:793–796, 1996.
- [3] G.W. Baxter. Stress-distributions in a two dimensional granular material. In Behringer and Jenkins, editors, *Powders et Grains 97*, pages 345–348. Balkema, Rotterdam, 1997.
- [4] C. h. Liu, S. R. Nagel, D. A. Schecter, S. N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan, and T. A. Witten. Force Fluctuations in Bead Packs. *Science*, 269(5223):513–515, 1995.