2D ÁRAMLÁSOK - A KÁRMÁN ÖRVÉNYSOR

(Horváth Viktor. Biológiai Fizikai Tanszék)

1. Elméleti bevezetés

1.1 A hidrodinamika alapegyenlete, a Lagrange- és Euler-féle leírási módok

Ezt a szakaszt a hidrodinamika iránt kevéssé érdeklődők kihagyhatják.

A hidrodinamika alapegyenlete a Navier-Stokes egyenlet. Bár nem szokás, de nyugodtan nevezhetjük a Navier-Stokes egyenletet, a hidrodinamika Newton egyenletének is. Mindkét egyenlet az adott tehetetlenségű objektum erőhatás által okozott gyorsulását írja le. A Navier-Stokes egyenlet valójában levezethető a Newton egyenletből.

$$\left\{ \frac{d\vec{v}}{dt} \right\} = \frac{1}{m}\left\{ \vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{s}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} \right\} = \frac{1}{\rho}\left\{ -\vec{\nabla}\mathrm{p} + \eta\Delta\vec{\mathrm{v}} \right\}$$

Miért lesz ilyen bonyolult a gyorsulás? A matematikus vénájú olvasó számára erre az a válasz, ha egy adott mennyiség (legyen például a T hőmérséklet) függ az időtől és a helytől, akkor általában igaz, hogy

$$\left\{ \frac{dT(x,t)}{dt} \right\} \longrightarrow \left\{ \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)T(x,t) \right\}$$

A nyíl jobb oldalán az első tag felelős azért, hogy megtudjuk a hőmérséklet miként függ expliciten az időtől. A második tag pedig azt mutatja meg, hogy a helykoordináták X(t) időfüggése miként járul hozzá a hőmérséklet változásához.

Vegyünk egy egyszerű példát: Tegyük fel, hogy egy BsC-s hallgatónak a Föld felszínén a hőmérsékletet kell vizsgálnia. A hőmérsékletet befolyásolja, hogy éppen nappal van vagy éjjel, ezért a hallgató azt tapasztalja, hogy az függ az időtől: T=T(t). A világ különböző pontjain (pl. Északi sarkon és az Egyenlítőn) levő hallgatók gyorsan rájönnek, hogy a hőmérskélet függ a helyzettől is: T=T(x). Végeredményben T=T(x,t). De mit fog tapasztalni az a hallgató, amely az Északi-sarki hideget megúnva egy igen nagy, **v** sebességgel közlekedő járművel az Egyenlítő felé veszi az irányt és eközben végzi mérését?

A helyzetváltoztatásból adódóan a helyfüggés is időfüggésként fog megjelenni. Ha a jármű nagyon lassú (a nappalok és éjszakák változásának üteméhez képest), akkor a második tag elhanyagolhatóvá válik, hiszen a gradiens egy nagyon kicsiny **v** értékkel szórzódik. Ha viszont a jármű gyors (pl. fénysebességű), akkor a hőmérséklet időbeli változásához szinte kizárólag a T helyfüggése járul hozzá, azaz ekkor az első tag válik elhanyagolhatóvá. Általános esetben természetesen mindkét tagot figyelembe kell venni.

A fenti példából látjuk, hogy a

$$\left\{\quad \frac{d}{dt} \quad\right\} \quad \text{és} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\right\}$$

operátorok egyenértéküek. Az első tag (teljes derivált) a vizsgált objektummal együtt mozogva írja le a vizsgált mennyiség változását és Lagrange-féle leírásnak nevezzük. A második (parciális) kifejezés a laboratóriumi vonatkoztatási rendszerben rögzített pontokban írja le a a vizsgált mennyiség változását és ezz Euler-féle leírásnak nevezzük. (Ez a térelméletek szokásos módszere.) A hidrodinamikában a folyadékrészecskék sebessége az, amit vizsgálunk, tehát ezt az operátort a T hőmérséklet helyett az általános esetben a helytől és időtől függő sebességtérre (vektormezőre) kell alkalmazni.

Ellenőrző kérdés: *Miért a második tag írja le a vonatkoztatási rendszerben rögzített pontokban a vizsgált mennyiséget, amikor a példában ez jelentette azt, hogy a kocsiban ül a BsC-s hallgató?*

1.2 A dimenziótlan Navier-Stokes egyenlet.

Ezt a szakaszt a hidrodinamika iránt kevéssé érdeklődők kihagyhatják.

Az egyszerűség kedvéért térjünk át a vektoros formátumról skalárra. Ezt az általánosság csorbulása nélkül megtehetjük, ha pl. egydimenziós esetet tekintünk:

$$\left\{\frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x \nabla_{\mathrm{x}}) v_x\right\} = \frac{1}{\rho}\{-\nabla_{\mathrm{x}} p' + \eta \nabla_{\mathrm{x}} \nabla_{\mathrm{x}} v_x\}.$$

A továbbiakban az x indexet nem tesszük ki. A fizikai egyenletek két egyenletnek felelnek meg, hiszen minden fizikai mennyiségnek van mérőszáma és mértékegysége. Az F=ma egyenlet például így néz ki: 2N=1kg x 2m/s2. Ezért egyidejűleg teljesülnie kell, hogy: 2=1 x 2 *és* N=kg x m/s^2. Ehhez hasonlóan jelöljük egy adott fizikai mennyiség mérőszámát egy kör index segítségével és a mértékegységét pedig vesszős mennyiséggel. Így $t=t_0t'$, $x=x_0x'$, $v=v_0v'$. Helyettesítsük ezeket be a fenti egyenletbe:

$$\left\{\frac{\partial v_0 v'}{\partial t_0 t'} + (v_0 v' \nabla_0 \nabla') v_0 v'\right\} = \left\{-\frac{1}{\rho_0 \rho'} \nabla_0 \nabla' (\mathrm{p}_0 p') + \frac{\eta}{\rho} \nabla_0 \nabla' \nabla_0 \nabla' (v_0 v')\right\}.$$

A mértékegységeket az egyes tagok elé kiemelve kapjuk, hogy

$$\left(\frac{v_0}{t_0}\right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial t'} + (v_0^2 \nabla_0) \cdot (v' \nabla') v' = -\left(\nabla_0 \frac{1}{\rho_0} p_0\right) \cdot \frac{1}{\rho'} \nabla' p' + \left(\frac{\eta}{\rho} \nabla_0^2 v_0\right) \cdot \nabla' \nabla' v'.$$

A gradiens operátort a differenciális alakjába írva:

$$\nabla_0 \nabla' = \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial}{\partial x_0 x'} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \quad \xrightarrow{ezért} \quad \nabla_0 = \frac{1}{x_0}.$$

A jobb oldal első tagjánál a zárójeles kifejezésre írhatjuk, hogy

$$\rho_0 = \frac{m_0}{x_0^3},\ p_0 = \frac{(m_0 \cdot a_0)}{x_0^2} = \frac{m_0}{x_0^2} \frac{x_0}{t_0^2} \ \xrightarrow{ezért}\ \left(\nabla_0 \frac{1}{\rho_0} p_0\right) = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0^3}{m_0} \cdot \frac{m_0}{x_0^2} \frac{x_0}{t_0^2} = \frac{x_0}{t_0^2}.$$

Szorozzuk most meg a Navier-Stokes egyenletet a $t_0/(v_0)^2$ értékkel:

$$\left(\frac{t_0}{v_0}\cdot\frac{v_0}{t_0}\right)\cdot\frac{\partial v'}{\partial t'}+\left(\frac{t_0}{v_0}\cdot v_0^2\frac{1}{x_0}\right)\cdot(v'\nabla')v'=-\left(\frac{t_0}{v_0}\cdot\frac{x_0}{t_0^2}\right)\cdot\frac{1}{\rho'}\nabla'p'+\left(\frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{t_0}{v_0}\cdot\frac{v_0}{x_0^2}\right)\cdot\nabla'\nabla'v'.$$

Kihasználva, hogy $x_0/t_0=v_0$, egyszerűsítés után a *Navier-Stokes egyenlet* alakja:

$$\frac{\partial v'}{\partial t'}+(v'\nabla')v'=-\frac{1}{\rho'}\nabla'p'+\frac{1}{\mathbf{Re}}\cdot\Delta'v'\ ,\ \ ahol\ \ \mathbf{Re}=\frac{x_0v_0}{\eta/\rho}=\frac{x_0v_0}{\vartheta}.$$

Ebben az egyenletben minden mennyiség dimenziótlan, és az egyetlen kontrol paraméter az **Re,** amit *Reynolds szám*nak nevezünk.

Ellenőrző kérdés: *A Reynolds számban szereplő (η/ρ) hányados neve "kinematikai viszkozitás". Ön szerint a víz vagy a levegő kinematikai viszkozitása a nagyobb? Miért?*

1.3 A hidrodinamikai skálatörvény és a turbulencia alapvető kérdése.

Ezt a szakaszt a hidrodinamika iránt kevéssé érdeklődők kihagyhatják.

Végezzük el a következő skálatranszformációt a Navier-Stokes egyenleten:

$$t'\xrightarrow{yields}\lambda t',\qquad x'\xrightarrow{yields}\beta x',\qquad ahol\ \beta\ !=\lambda^q.$$

Tehát az időt és helykoordinátát átskálázzuk két tetszőleges számmal és a helykoordináta skálafaktorát egyszerűen (egy másik –q- ismeretlen segítségével) kifejezzük az idő skálafaktorával. Ebből (és a v=x/t trivialitásból) következően:

$$t'\xrightarrow{yields}\lambda t',\qquad x'\xrightarrow{yields}\lambda^q x',\qquad v'\xrightarrow{yields}\lambda^{q-1}v'.$$

Ha ezeket a transzformációkat beírjuk a dimenziótlan Navier-Stokes egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\frac{\partial\lambda^{q-1}v'}{\partial\lambda t'}+\left(\lambda^{q-1}v'\frac{1}{\lambda^q}\nabla'\right)\lambda^{q-1}v'=-\frac{1}{\rho'}\nabla'p'+\frac{1}{\mathbf{Re}}\cdot\left(\frac{1}{\lambda^q}\right)^2(\nabla')^2\lambda^{q-1}v'$$

Egyszerűsítve:

$$\lambda^{q-2}\cdot\frac{\partial v'}{\partial t'}+\lambda^{q-2}\cdot(v'\nabla')v'=-\lambda^{q-2}\cdot\frac{1}{\rho'}\nabla'p'+\lambda^{-q-1}\cdot\frac{1}{\mathbf{Re}}\cdot(\nabla')^2v'$$

Ez az egyenlet akkor lenne *invariáns* tetszőleges átskálázással szemben, ha a lambdás tagok kiejthetők az egyenletből. A lambda tagokkal való egyszerűsítés akkor oldható meg, ha találunk olyan *q* értéket, amelyre:

$$\lambda^{q-2}=\lambda^{-q-1}\ .\quad \text{Ennek megoldása:}\quad q={}^{1}\!/_{2}$$

Ez a jól ismert *hidrodinamikai skálatörvény.*

Ami viszont kevéssé közismert, hogy az átskálázott Navier-Stokes egyenlet egy másik esetben is "invariáns" az átskálázással szemben. Az invarianciát ugyanis a Reynolds számot tartalmazó (utolsó) tag "rontja" el. A hidrodinamikai skálatörvény levezetésekor pont ezen tag lambdás szorzótényezőjét kellett egyenlővé tenni a többi tag előtt szereplő taggal, hogy kiejthetők legyenek. Ha azonban a

Reínolds szám tart a végtelenhez (turbulencia határesete), akkor ez a tag zéróvá válik és a maradék összes többi tag előtt ugyanazon lambdás kifejezés áll, így ezekkel lehet egyszerűsíteni. Így elmondható, hogy elméletileg a teljesen kifejlett turbulencia esetén folytonosan végtelen skálainvarianciát mutat a Navier-Stokes egyenlet. A turbulencia egyik alapvető kérdése az, hogy ezen, elméletileg végtelen sok lehetőség közül mely q értékek választódnak ki.

1.4 Kétdimenziós áramlásoknál az örvényesség megmaradása.

1.5 Inverz kaszkád jelenség.

1.6 Az elsődleges instabilitás és a Roshko-féle törvény.

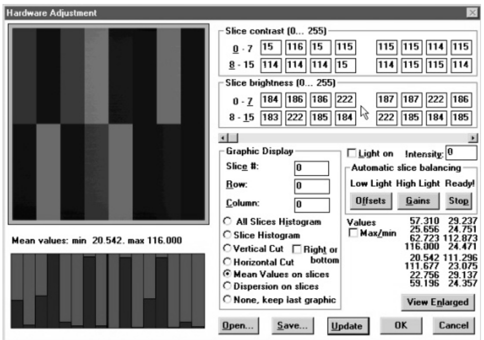
1.7 Landau-féle amplitúdó egyenletek.

MÉRÉS

A mérési eszköze

Általános ismertetés

A mérés eszköze egy “Phantom vision” tipusú ún. gyorsvideo kamera. A kamera fő tulajdonsága az, hogy a hagyományos videokamerák 50 kép/sec sebességéhez képest akár hatvanszoros sebességgel is képest eseményeket rögzíteni.

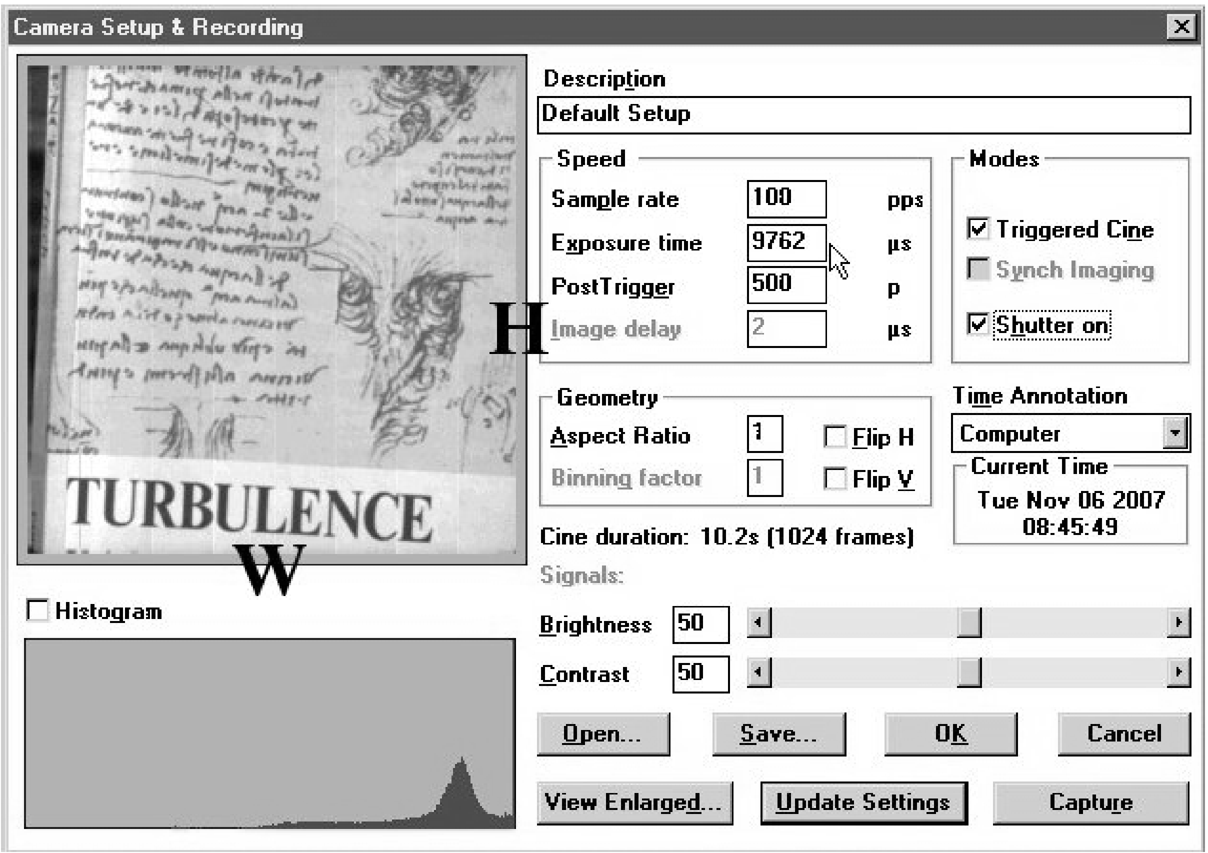


A kamera dobozában lényegében 16 darab, a hagyományosnál kb. négyszer gyorsabb digitális videokamera és egy számítógép van egybeépítve. A 16 darab kamera mindegyike a képmező 1/16-val foglalkozik, és a teljes kép ezek összességéből áll elő. Az egyes kamerák nem feltétlen adnak azonos szürkeségi szintet ugyanazon megvilágítási viszonyok mellett, ezért a **Acquisition->Hardware Adjustment** menüpont alatt az egyes kamerák alapértékei beállíthatók. **<u>Ehhez a hallgatóknak szigorúan tilos(!) változtatni a mérést felügyelő tanár felügyelete nélkül!</u>**

Adatgyűjtés (Acquisition) menü

A mérés szinte kizárólag ezen menüpont segítségével történik. Itt állíthatók be a gyorsvideo kamera paraméterei és felvétel után innét jutunk a mérés almenübe.

A menüpontba belépve (lásd alább) a bal oldalt a kamera által látott kép jelenik meg. Ennek segítségével lehet beállítani az éles fókuszt. Ha a látott kép nem éles, az nem feltétlen a helytelen fókusznak köszönhető, mivel a mozgás is életlenséget (ún. “motion blur”) hozhat létre. Ennek kiküszöbölésére szolgál a zársebesség a jobb oldalon, de erről kicsit később részletesen lesz szó.



“Sample rate” (azaz *mintavételezési sebesség*): Itt lehet beállítani, hogy másodpercenként mennyi képet vegyen fel a kamera. (a mértékegység “**p**icute **p**er **s**econd” (“**pps**”). A legkisebb beállítható érték: 24. A legnagyobb beállítható érték 3024, de ez függ az oldalaránytól (lásd alább). Ha egy másodperc alatt X képet rögzítünk, akkor egyetlen kép megvilágítására maximálisan 1/X idő áll rendelkezésre. Ezért a mintavételezési sebesség növelésekor egyre sötétebb lesz a kép. Ezt bizonyos mértékben kompenzálni tudjuk a panel alján található “**Brightness” (*fényesség*)** értékének növelésével, de igazán jó felvételeket csak akkor fogunk kapni, ha a fényforrás intenzitását növeljük.

“Shutter on” (azaz *expozíciós zár*): Ha a fényforrás túl erős az adott mintavételezési sebesség mellett, akkor a túlexponálást a expozíciós zár (“shutter on”) bekapcsolásával lehet megakadályozni. Ekkor az egyes képek a mintavételezési sebesség reciprokánál kisebb időtartamra lesznek megvilágítva. Ennek alkalmazása abban az esetben is hasznos lehet, ha a az adott mintavételezési idő alatt is jelentős mértékben változna a kép tartalma. Ekkor ugyanis elmosódik a kép (“motion blur”). Az expozíciós zárral tovább csökkenthetjük az egyetlen kép megvilágítási idejét és ezzel bár tovább csökken a kép fényessége, az elmozdulásból származó elmosódottság is csökken.

“Exposure time” (azaz *expozíciós idő*): Hogy mennyivel kevesebb idő jut az egyes képekre az expozíciós zár bekapcsolásakor, ezt az expozíciós idő határozza meg. Ez értelemszerűen nem lehet nagyobb, mint az 1/(mintavételezési sebesség), hiszen ez felel meg annak az esetnek, mint amikor nincs az expozíciós zár bekapcsolva. Ezért a programban csak a mintavételezési sebesség reciprokánálvalamivel kisebb értékű expozíciós idő adható meg. Ha nagyobbat adnánk meg, akkor a program kiírja, hogy az aktuális mintavételezési sebesség mellett mi az expozíciós idő maximálisan megadható értéke.

“Aspect Ratio” (azaz *oldalarány*): Ez a paraméter a (képmező szélessége=**W**)/(képmező magassága=**H**) arányt állítja be. A legnagyobb képmező az Aspect Ratio=1 értéknél 512 pixel x 512 pixel méretű. A kamera adatfeldolgozási sebessége azonban véges. Ha egy adott méretű képnél ezt a határt elértük, akkor csak úgy lehet tovább növelni a sebességet, ha a képekről átvinni kívánt információ mennyiségét csökkentjük. Az egyik szokásos megoldás szerint a képmező mérete változatlan marad, de a felbontás csökken. A Phantom kamera *ehelyett* a felbontást megtartva a kép méretét csökkenti. Mivel a gyors folyamatok nagyon gyakran irányítottak, elég az egyik oldal (**H**) nagyságát csökkenteni. (Gondoljunk csak bele: egy kilőtt puskagolyót elég a haladási nyomvonala mentén lefilmezni. A golyó melletti –állandó- hátteret szükségtelen lefilmezni.)

Mivel azonban ez csak programozás segítségével történik, célszerű az egynél nagyobb oldalarányú felvételek esetén a felesleges területeket kimaszkolni a kamera objektívjénél. Így a CCD érzékelő nem megy tönkre erős megvilágítás esetén (ami mindig szükséges gyors események filmezésénél). Az objektív megfelelő mértékű kitakarásához egy lemezkészlet áll rendelkezésre.

Öt különböző oldalarány adható meg és a következőkben az egyes arányokhoz tartozó maximális képsebességet tüntetjük fel:
1 (W512xH512) -> 576 pps
2 (W512xH256)-> 1014,
4 (W512xH128) -> 1635,
8 (W512xH64) -> 2357, és végül
16 (W512xH32) -> 3024.

A kisebb oldalarányú felvételek további előnye: A szükséges képsebességtől függetlenül célszerű mindig a legnagyobb oldalarányt választani, amit még megenged a kép tartalma. Ez azért van, mert a Phantom kamera az adott képsebességgel egy speciális memóriába menti a digitális képeket. Mivel a memória mérete fix, adott méretű képből mindig azonos mennyiségű kép fér a memóriába. (Az 1-es oldalaránynál kapható 512x512 pixel méretű képekből 1024 fér a gyorsmemóriába.) Ha tehát azonos képsebesség mellett (az oldalarány növelésével) csökkentjük a képek méretét, akkor a valós időben hosszabb eseményt is tudunk rögzíteni.

“Capture” (azaz *felvétel*). Ezen gomb megnyomásával indítjuk el a képrögzítés folyamatát. Azonban ahhoz, hogy a képrögzítés folyamata befejeződjön, még a trigger gombot is meg kell nyomni (lásd alább).

“Post Trigger”. A trigger jelentőségét az alábbi két egyszerű példával lehet megvilágítani: Ha szemünk egyetlen pillantását szeretnénk felvenni, akkor két lehetőség van: (1) Ha a saját szempillantásunkat akarjuk felvenni, akkor a felvételt közvetlenül az esemény bekövetkezte *előtt* el tudjuk indítani, hiszen tudjuk (érezzük) mikor következik be az esemény. (2) Ha azonban más valaki szempillantását szeretnénk felvenni, akkor csak azt látjuk, amikor megtörtént az esemény, és ekkor az esemény bekövetkezte *után* akarjuk leállítani a felvételt.

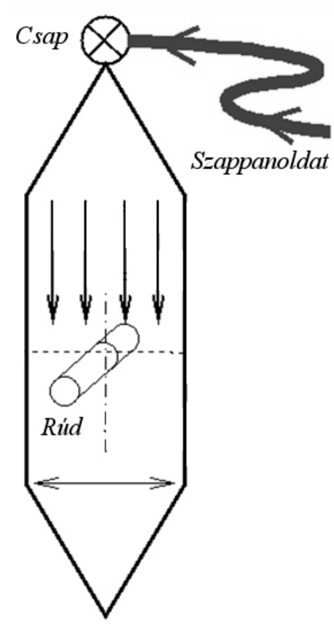
A kamera gyorsmemóriájába foylamatosan történik az adatrögzítés a Capture gomb megnyomása után. Ha a rendelkezésre álló memória végére ért a kamera, akkor a korábbi képkockákat felülírva elölről kezdi a memória feltöltését. A "post trigger" azt a képszámot adja meg, amennyi darab képet szeretnénk, ha a kamera a trigger gomb megnyomása *után* még felvenne a képrögzítés leálltáig.

Így tehát az esemény bekövetkezte után szeretnénk leállítani a felvételt, akkor "Post Trigger"=0 beállítást kell alkalmaznunk. Ha pedig azt szeretnénk, hogy a T gomb lenyomása utáni események kerüljenek rögzítésre, akkor adjuk meg a Post Trigger értékének a memóriába férő képkockák számát.

Mérési (Measurement) menü

A mérési elrendezés

A kísérleti berendezés leírása



A mérési elrendezés nagyon egyszerű és akár otthon is megvalósítható néhány száz forintból. (Azonban ahhoz, hogy mérni is tudjanak ezen a berendezésen, kell még néhány milliót költeni a mérőeszközökre.) Egy folyadéktartályból két szál horgászzsinór fut lefelé. Ezeket alul összekötjük és egy súlyt akasztunk rájuk, hogy feszesen tartsa őket. A tartályba szappanoldatot helyezünk. Az oldat kifolyási sebessége (hozama) egy csap segítségével szabályozható. Amikor az oldat végigfutott a zsinórokon, akkor a zsinórokat ellentétes irányban széthúzva egy hártyát kapunk. A zsinórok egymástól való távolságát be lehet állítani. A hártya sokkal tovább életben marad, mint megszoktuk, ugyanis a párolgás okozta szétpattanást megakadályozza a felülről érkező utánpótlás.

Az így előállított 5-10 mikrométer vastagságú hártyába szinte bármit bele lehet helyezni, ha előtte alaposán benedvesítettük szappanoldattal. A mérés során különböző átmérőjű injekciós tűk és egyéb henger formájú tárgyak kerülnek behelyezésre az oldatba, hogy megfigyeljük az akadály mögött képződő Kármán örvénysort.

A mérési menete

frekvencia, sebesség, gyorsulás különböző Reynolds számok mellett.